CPI2 (S4) (2020 – 2021)

Calcul des probabilités

Chapitre2

Pr : M.O. Aboutafail

Chapitre 2 :

$\boxed{\text{Notion de probabilité}}$

I. Le langage des probabilités

1. Expérience aléatoire

Définition

> On appelle expérience aléatoire une expérience qui, reproduite dans des conditions identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance. c'est-à-dire toute expérience entraînant des résultats qui dépendent du hasard.

I. Le langage des probabilités

1. Expérience aléatoire

Définition

On appelle expérience aléatoire une expérience qui, reproduite dans des conditions identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance. c'est-à-dire toute expérience entraînant des résultats qui dépendent du hasard.

L'espace de tous les résultats possibles est appelé **espace d'État** (où **l'Univers**) associé à l'expérience, il sera noté par Ω.

I. Le langage des probabilités

1. Expérience aléatoire

Définition

On appelle expérience aléatoire une expérience qui, reproduite dans des conditions identique, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance. c'est-à-dire toute expérience entraînant des résultats qui dépendent du hasard.

L'espace de tous les résultats possibles est appelé **espace d'État** (où **l'Univers**) associé à l'expérience, il sera noté par Ω.
Un résultat possible de l'expérience est appelé **épreuve** et est noté classiquement par ω.

Notion de probabilité

Exemple

"Lancé d'un dé régulier" est une expérience aléatoire avec :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$\omega = 1$ *est un résultat possible de cette expérience.*

Notion de probabilité

Exemple

"Lancé d'un dé régulier" est une expérience aléatoire avec :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$\omega = 1$ *est un résultat possible de cette expérience.*

Exemple

"Lancé de deux pièces de monnaie" est une expérience aléatoire avec :

- $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.
- $\omega = (P, F)$ *est un résultat possible.*

Exemple

"Lancé d'un dé régulier" est une expérience aléatoire avec :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$\omega = 1$ *est un résultat possible de cette expérience.*

Exemple

"Lancé de deux pièces de monnaie" est une expérience aléatoire avec :

- $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$.
- $\omega = (P, F)$ *est un résultat possible.*

Exemple

"Durée de vie d'un produit électronique" est une expérience aléatoire avec :

- $\Omega = [0, +\infty[$.
- $t = 2000h$ *est un résultat possible.*

Notion de probabilité

Exemple

"Temps de passage des voyageurs à un guichet" est une expérience aléatoire avec :

$$\Omega = (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}.$$

Notion de probabilité

Exemple

"Temps de passage des voyageurs à un guichet" est une expérience aléatoire avec :

$$\Omega = (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}.$$

Exemple

"L'observation d'un prix d'actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$" est une expérience aléatoire avec :

$$\Omega = \mathcal{C}([t_1, t_2], \mathbb{R}^+).$$

Notion de probabilité

Exemple

"Temps de passage des voyageurs à un guichet" est une expérience aléatoire avec :

$$\Omega = (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}.$$

Exemple

"L'observation d'un prix d'actif financier sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$" est une expérience aléatoire avec :

$$\Omega = \mathcal{C}([t_1, t_2], \mathbb{R}^+).$$

Remarque

Si on répète la même expérience d'univers Ω, on pourra choisir comme univers Ω^n dans le cas de n répétition, et $\Omega^{\mathbb{N}}$ si on la répète indéfiniment.

2. Événements aléatoires

Définition

Nous appelons événement aléatoire associé à l'expérience, un sous-ensemble de Ω qui peut ou non se réaliser suivant l'issue de l'expérience.

2. Événements aléatoires

Définition

Nous appelons événement aléatoire associé à l'expérience, un sous-ensemble de Ω qui peut ou non se réaliser suivant l'issue de l'expérience.

Exemple

Si l'expérience consiste en un lancer d'un dé ; ***A :«le lancer est impair»*** *est un événement aléatoire.*

2. Événements aléatoires

Définition

Nous appelons événement aléatoire associé à l'expérience, un sous-ensemble de Ω qui peut ou non se réaliser suivant l'issue de l'expérience.

Exemple

Si l'expérience consiste en un lancer d'un dé ; ***A :«le lancer est impair»*** *est un événement aléatoire.*

Exemple

Si l'on s'intéresse au prix d'un actif financier sur le temps $[t_1, t_2]$; l'ensemble ***A :«le prix est inférieur au seuil α»*** *est un événement aléatoire.*

•**Réalisation d'un événement :**

Soit A un évinement de l'unvers Ω et soit ω le résultat de l'expérience. Alors, A se réalise si et seulement si $\omega \in A$.

- L'événement $A = \Omega$ est l'événement certain (tous les résultats de l'expérience prennent leurs valeurs dans Ω), $A = \Omega$ se réalise toujours.
- $A = \emptyset$ est l'événement impossible. Il ne se réalise jamais.
- $A = \{\omega\}$ s'appelle événement élémentaire.

•**Opérations sur les événements :**

◇ ***Complémentaire (contraire) de*** A ***:*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A.

- ✓ $\overline{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$
- ✓ $\overline{A}$ se réalise si et seulement si A ne se réalise pas.

•**Opérations sur les événements :**

◇ ***Complémentaire (contraire) de*** A ***:*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A.

✓ $\overline{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$

✓ $\overline{A}$ se réalise si et seulement si A ne se réalise pas.

◇ ***Réunion de*** A ***et*** B ***:*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou B ou aux deux.

✓ $A \cup B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$.

✓ $A \cup B$ se séalise si et seulement si A se réalise ou B se réalise.

Notion de probabilité

◇ ***Intersection de*** A ***et*** B ***:*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B.

- ✓ $A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$.
- ✓ $A \cap B$ se séalise si et seulement si A et B se réalisent.

Notion de probabilité

◇ ***Intersection de*** A ***et*** B ***:*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B.

- ✓ $A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$.
- ✓ $A \cap B$ se séalise si et seulement si A et B se réalisent.

◇ ***Inclusion :*** l'événement A est inclus dans l'événement B si et seulement si tout élément de A appartient à B.

- ✓ $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$.
- ✓ si A est réalisé, alors B est réalisé.

Notion de probabilité

◇ ***Intersection de A et B :*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B.

- ✓ $A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$.
- ✓ $A \cap B$ se séalise si et seulement si A et B se réalisent.

◇ ***Inclusion :*** l'événement A est inclus dans l'événement B si et seulement si tout élément de A appartient à B.

- ✓ $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$.
- ✓ si A est réalisé, alors B est réalisé.

◇ ***Incompatibilité (Disjonction) :*** A et B sont incompatible si et seulement si A et B n'ont pas d'éléments communs ($A \cap B = \emptyset$).

Notion de probabilité

- ***Intersection de A et B :*** est un événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B.
  - ✓ $A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$.
  - ✓ $A \cap B$ se séalise si et seulement si A et B se réalisent.
- ***Inclusion :*** l'événement A est inclus dans l'événement B si et seulement si tout élément de A appartient à B.
  - ✓ $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$.
  - ✓ si A est réalisé, alors B est réalisé.
- ***Incompatibilité (Disjonction) :*** A et B sont incompatible si et seulement si A et B n'ont pas d'éléments communs ($A \cap B = \emptyset$).
- ***Système complet d'événements :*** Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ constitue un système complet d'événements, si ils forment une partition de Ω. C'est-à-dire, si

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j \text{ et } \bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega.$$

Notion de probabilité

Notation

Nous notons par $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les événements. Il modélise l'information qui peut être obtenue à partir des résultats de l'expérience.

Notion de probabilité

Notation

Nous notons par $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les événements. Il modélise l'information qui peut être obtenue à partir des résultats de l'expérience.

Remarque

Pour que la modélisation soit cohérente avec l'intuition, $\mathcal{A}$ doit être stable par les opérations ensemblistes si-dessus :
si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$ aussi $\Omega \in \mathcal{A}$ et $\emptyset \in \mathcal{A}$.

•Correspondances entre opérations ensemblistes et événements aléatoires :

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste	Notation
événement certain	ensemble tout entier	Ω
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$
événement contraire de A	complémentaire de A	$\overline{A}$ ou A^c
A ou B	réunion de A et B	$A \cup B$
A et B	intersection de A et B	$A \cap B$
A implique B	A inclus dans B	$A \subset B$
A et B incompatible	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

1. Ensembles dénombrables :

Définition

Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire si ses points peuvent être énumérotés en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Ensembles dénombrables :

Définition

Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, c'est-à-dire si ses points peuvent être énumérotés en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

- *Les ensembles* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont des ensembles dénombrables.*
- *Les ensembles* $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, $\mathbb{R}$ *et* $[a, b]$ $(a < b)$ *ne sont pas dénombrables.*

Propriétés

- ◇ Tout ensemble dénombrable est infini. Mes la réciproque est fausse.
- ◇ Toute partie d'un ensemble dénombrable est elle-même finie ou dénombrable.
- ◇ La réunion d'une famille finie ou dénombrable d'ensembles eux-même fini ou dénombrable.
- ◇ Si A n'est ni fini, ni dénombrable, il en est de même de $A \backslash B$, pour tout $B \subset A$ qui est fini ou dénombrable.

2. Tribu :

Définition

La classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est dite **une tribu** (ou σ-algèbre) si elle vérifie les assertions suivantes :

- ▷ $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$.
- ▷ $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire : $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
- ▷ $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection dénombrable : $(A_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ implique que $\bigcup_{n \in N} A_n$ et $\bigcap_{n \in N} A_n$ sont dans $\mathcal{A}$.

2. Tribu :

Définition

La classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est dite **une tribu** (ou σ-algèbre) si elle vérifie les assertions suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire : $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection dénombrable : $(A_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ implique que $\bigcup_{n\in N} A_n$ et $\bigcap_{n\in N} A_n$ sont dans $\mathcal{A}$.

On dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable** (mesurable dans le langage de la théorie des mesures).

Exemple

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ *est la tribu grossière (triviale). C'est la plus petite tribu de* Ω *(au sense de l'inclusion).*
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *est la tribu discrète (des parties). C'est la plus grande tribu de* Ω*.*
- *Si* $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *alors* $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$ *est une tribu.*

II. Définition générale des probabilités

Exemple

- *$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est la tribu grossière (triviale). C'est la plus petite tribu de Ω (au sense de l'inclusion).*
- *$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu discrète (des parties). C'est la plus grande tribu de Ω.*
- *Si $\Omega = \{a, b, c, d\}$ alors $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$ est une tribu.*

Définition

Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle tribu engendrée par $\mathcal{G}$ et on la note par $\mathcal{T}(\mathcal{G})$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{G}$. Elle existe toujours, car d'une part $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant $\mathcal{G}$, et d'autre part l'intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu. Ainsi, la tribu engendrée par $\mathcal{G}$ est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{G}$.

II. Définition générale des probabilités

Exemple

- *La tribu engendrée par un événement A est $\mathcal{T}(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.*
- *Tribu des borélienne $\mathcal{B}$. C'est la tribu engendrée par la classe des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*
    - *Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{Q}(ou \mathbb{R})\} = \{]x, y[, x, y \in \mathbb{R}\}$.*
    - *Lorsque $\Omega = I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_I = \{]a, b[, a < b, (a, b) \in I^2\}$.*
- *Si $\mathcal{F}$ est constitué d'un nombre fini ou dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui forment une partition de Ω, la tribu engendrée par $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des réunions quelconques d'événement A_n. Par exemple, si $\mathcal{F} = \{A, \overline{A}\}$, alors $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$.*

II. Définition générale des probabilités

• **<u>Choix d'une tribu :</u>** Se fait en fonction de l'information qu'on a sur l'expérience.

- Si Ω est fini ou dénombrable, nous choisisons systématiquement la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Si $\Omega = \mathbb{R}$, nous choisisons la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
- Si $\Omega = I$ intervalle de $\mathbb{R}$, nous choisisons la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{B}_I$.

3. Définition d'une probabilité :

Définition

Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, on appelle probabilité (dite aussi mesure de probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ satisfaisant aux axiomes suivants :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (totalité).
- Pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux-à deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) \quad (\sigma - \textit{additivit}\text{é}).$$

3. Définition d'une probabilité :

Définition

Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, on appelle probabilité (dite aussi mesure de probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ satisfaisant aux axiomes suivants :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (totalité).
- Pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux-à deux disjoints, on a :

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) \quad (\sigma - \textit{additivit}\text{é}).$$

Définition : Modèle de probabilité (Kolmogorov 1933)

On appelle le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité (espace probabilisé). C'est un espace mesuré dans le langage de la théorie de la mesure.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est $\mathbb{P}$-négligeable (A est un événement presque impossible).
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est $\mathbb{P}$-presque-sûrement (A est presque certain).

II. Définition générale des probabilités

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est $\mathbb{P}$-négligeable (A est un événement presque impossible).
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est $\mathbb{P}$-presque-sûrement (A est presque certain).

Propriétés

Toute probabilité $\mathbb{P}$ possède les propriétés suivantes :

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2) $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A})$.

4) Fromule de Poincaré : $\forall (A_1, A_2, ..., A_n) \in \mathcal{A}^n$,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k,$$

où $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$.
En particulier,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ &- \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

5) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événement, alors la suite des réels $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante, et on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i).$$

6) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événement, alors la suite des réels $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i).$$

7) Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements, alors on a :

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_i).$$

4. Probabilité sur un espace fini ou dénombrable : On suppose que l'univers Ω est fini ou dénombrable. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$ (l'ensemble des resultats possibles).

- On définit la probabilité p_i de chaque résultat élémentaire $\{\omega_i\}$, on obtient alors une suite $(p_n)_n$ de nombres tels que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

- La probabilité d'un événement quelconque A est donné par :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Proposition

Une probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les singletons.
Etant donnée une suite $(p_n)_n$ de nombres réels tels que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

elle lui correspond une unique probabilité $\mathbb{P}$ tels que pour tout A,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_n \in A} \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = \sum_{\omega_n \in A} p_n.$$

Exemple

Soit $\theta > 0$ *et* $p_n = e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}$.
On a $0 \leq p_n \leq 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ *et* $\sum_n p_n = e^{-\theta}\sum_n \frac{\theta^n}{n!} = 1$,
donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définit une probabilité sur* $\mathbb{N}$, *appelée loi de Poisson de paramétre* θ.

Proposition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ un ensemble dénombrable et soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur Ω, et $p_n = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$.
Alors, $\forall A \in \mathcal{P}(A)$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n p_n \delta_{\omega_n}(A)$$

avec δ_ω, appelée mesure de Dirac en ω, est définie de la manière suivante : $\forall A \in \mathcal{P}(A) \begin{cases} \delta_\omega(A) = 1, & si \quad \omega \in A \\ \delta_\omega(A) = 0, & si \quad \omega \notin A. \end{cases}$
La probabilité $\mathbb{P}$ peut donc s'écrire : $\mathbb{P} = \sum_n p_n \delta_{\omega_n}$.

Probabilité uniforme : Un exemple important de probabilité sur un espace d'états Ω fini est celui de la probabilité uniforme, pour laquelle chaque singleton $\omega \in \Omega$ a la même chance de réalisation.

Probabilité uniforme : Un exemple important de probabilité sur un espace d'états Ω fini est celui de la probabilité uniforme, pour laquelle chaque singleton $\omega \in \Omega$ a la même chance de réalisation.

Définition

On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace fini Ω est uniforme (où équiprobable), si $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ ne dépend pas de ω. Donc, pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$p_\omega = \frac{1}{card(\Omega)}.$$

Ainsi, si $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un événement, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

II. Définition générale des probabilités

Remarque

- *Le calcul d'une probabilité uniforme se ramène à des dénombrements (calcul combinatoire).*
- *Sur un espace fini Ω, il existe une et une seule probabilité uniforme. Cette probabilité décrit mathématiquement l'expression intuitive de **"au hasard"**.*

Remarque

- *Le calcul d'une probabilité uniforme se ramène à des dénombrements (calcul combinatoire).*
- *Sur un espace fini Ω, il existe une et une seule probabilité uniforme. Cette probabilité décrit mathématiquement l'expression intuitive de **"au hasard"**.*

Exemple

On jette deux fois un dè non truqué et on note les deux numéros obtenus.
Soit B l'événement "la somme des deux numéros obtenus est 7".
On a $B = \{(1,6);(2,5);(3,4);(6,1);(5,2);(4,3)\}$, *donc* $card(B) = 6$.
D'autre part $\forall (i,j) \in \Omega^2$, $P\{(i,j)\} = \frac{1}{6^2}$, *donc* $\mathbb{P}(B) = 6 \times \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6}$.

5. Conditionnement (Probabilité conditionnelle) :

Définition

Soit A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$, alors on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B que l'on note $\mathbb{P}(A/B)$, le rapport

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

5. Conditionnement (Probabilité conditionnelle) :

Définition

Soit A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$, alors on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B que l'on note $\mathbb{P}(A/B)$, le rapport

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque

L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}(./B) : & \mathbb{A} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A/B) \end{array}$$

définit une probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle sachant B.

Proposition

Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A/B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A) \times \mathbb{P}(A)$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A/B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A) \times \mathbb{P}(A)$$

Proposition

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ sont des événements de Ω tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2/A_1) \times \mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \times ... \times \mathbb{P}(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

II. Définition générale des probabilités

Proposition : Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition finie ou dénombrable d'événements de Ω, telle que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour chaque i. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition : Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition finie ou dénombrable d'événements de Ω, telle que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour chaque i. Alors, $\forall B \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B/A_i) \times \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition : Formule de Bayes

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une partition finie ou dénombrable d'événements de Ω, telle que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour chaque i. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_j \mathbb{P}(B/A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$

Exercice

Un individu est tiré au hasard dans une population où l'on trouve une proportion 10^{-5} *du virus Covid-19. On lui fait passer un test de détection du virus Covid-19. Par ailleurs, des expériences antérieures ont permis de savoir que les probabilités d'avoir un résultat positif lors de l'application du test si l'individu est touché par le virus, ou s'il ne l'est pas, sont respectivement égales à 0.99 (sensibilité du test) et à 0.001 (spécificité du test). Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité pour que l'individu soit effectivement contaminé par le virus.*

Exercice

On considère une urne U_1 contenant deux boules blanches et une boule noire, et une urne U_2 contenant une boule blanche et une boule noire. On choisit une urne au hasard puis on prélève une boule dans cette urne. Les boules sont indisernables au toucher.

1. *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?*
2. *Quelle est la probabilité que la boule soit extraite de l'urne U_1 ?*

5. Indépendance :

Définition

Deux événement A et B sont dits indépendants, relativement à la probabilité $\mathbb{P}$, si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

5. Indépendance :

Définition

Deux événement A et B sont dits indépendants, relativement à la probabilité $\mathbb{P}$, si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Intuitivement, deux événement A et B sont indépendants si le fait de savoir que A est réalisé ne donne aucune information sur la réalisation de B et réciproquement.

5. Indépendance :

Définition

Deux événement A et B sont dits indépendants, relativement à la probabilité $\mathbb{P}$, si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Intuitivement, deux événement A et B sont indépendants si le fait de savoir que A est réalisé ne donne aucune information sur la réalisation de B et réciproquement.

Attention : Ne pas confondre indépendance avec incompatible, car dans ce dernier cas $A \cap B = \emptyset$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

En conséquence, si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A sera dit indépendant de B si :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Remarque

1) La notion d'indépendance est une notion liée au chois de la probabilité $\mathbb{P}$ *et n'est pas une notion ensembliste.*
2) Si $\mathbb{P}(A) > 0$ *et* $\mathbb{P}(B) > 0$, *alors :*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$$

on dit que la notion d'indépendance est symétrique.

II. Définition générale des probabilités

Exemple

On lance un dé rouge et un dé noire et on considère les événements suivants :
A : «le dé noire affiche 6» et B : «le dé rouge affiche 5».
L'espace d'état de cette expérience est :
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les épreuves de cette expérience sont équiprobables : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6^2}$.

Comme $A = \{6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{5\}$ et $A \cap B = \{(6, 5)\}$, alors :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A) & = & \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6} \\
\mathbb{P}(B) & = & \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6} \\
\mathbb{P}(A \cap B) & = & \dfrac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \dfrac{1}{6^2}
\end{array}$$

et donc A et B sont indépendants.
Bien entendu, ce resultat est évédent, il n'y a pas d'influence d'un dé sur l'autre.

Proposition

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} &\iff \overline{A} \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \\ &\iff A \text{ et } \overline{B} \text{ indépendants} \\ &\iff \overline{A} \text{ et } B \text{ indépendants.} \end{aligned}$$

II. Définition générale des probabilités

`Indépendance mutuelle:` Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il y a lieu de distinguer l'indépendance deux-à-deux qui impose :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j), 1 \leq i \neq j \leq n$$

et l'indépendance mutuelle, condition plus forte qui s'écrit :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ...A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times ... \times \mathbb{P}(A_{i_k})$$

pour toute suite finie $(i_1, i_2, ..., i_k)$ d'entiers deux-à-deux distincts.

Fin du chapitre 2